CHAPITRE 2 : Équations de transport

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution des problèmes de Cauchy suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + b(t,x) \cdot \nabla_x u = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

(équation de transport sous forme forte)

et

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(bu) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

(équation de transport sous forme conservative),

où $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ de vecteurs.

I) Équation sous forme forte - cas régulier

1) Méthode des caractéristiques :

On commence par supposer que le champ de vecteurs b est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ et qu'il vérifie la condition suivante :

$$(3) \quad \forall T>0,\ \exists K_T>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^N, \quad \|b(t,x)\| \leq K_T(1+\|x\|)$$

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(4)\begin{cases} \dot{X}(t,y) = b(t, X(t,y)) & t \in \mathbb{R} \\ X(0,y) = y \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, l'équation différentielle (4) admet une unique solution, et grâce à la condition (3), cette solution est globale.

De surcroît, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ y &\longmapsto X(t,y) \end{aligned}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

<u>Définition</u>: Les solutions de l'équation différentielle (4) sont appelées <u>caractéristiques</u> de l'équation (1) (ou de l'équation (2)).

Grâce aux caractéristiques, on peut obtenir une formule de représentation pour les solutions de (1). Plus précisément, on a :

<u>Théorème</u>: On suppose que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ vérifie (3). Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe une unique solution $\mathcal{C}^1$ de l'équation (1). Cette solution est constante le long des caractéristiques:

$$(5) \qquad u(t, X(t,y)) = u_0(y) \quad \forall t \geq 0 \; \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Preuve: Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ quelconque

u est solution de (1)

$$\iff \begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ \forall t > 0 \\ \text{et} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \partial_t u(t, X(t,y)) + b(t, X(t,y)) \cdot \nabla_x u(t, X(t,y)) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \ \forall t > 0 \\ \text{et} \\ u(0, X(0,y)) = u_0(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t, X(t,y)) = 0 \qquad \forall t > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^N \\ \text{et} \\ u(0, X(0,y)) = u_0(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\iff u(t, X(t,y)) = u_0(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall t \geq 0.$$

Comme $y \mapsto X(t,y)$ est un difféomorphisme, ceci définit bien une solution unique. ∎

2) Premières propriétés:

(i) Vitesse finie de propagation:

Supposons pour simplifier que $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$.
Alors $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs prises par $u^0(y)$ pour $|x-y| \leq \|b\|_\infty t$.

Autrement dit, si $\operatorname{Supp} u_0 \subset B_R$, alors $\operatorname{Supp} u(t) \subset B_{R + \|b\|_\infty t}$.

(ii) Principe du maximum :

On lit sur la formule (5) que

$$\begin{cases} \operatorname{Inf} u_0 \leq u(t,x) \leq \operatorname{Sup} u_0 \\ \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

II) Équation conservative : cas régulier

On se place toujours dans le cadre $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$, b vérifie (3). On suppose de plus que $\operatorname{div} b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$

On définit

$$J(t,y) = \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} b)(s, X(s,y))\, ds \right)$$

de sorte que $\begin{cases} \dot{J}(t,y) = (\operatorname{div} b)(t, X(t,y))\, J(t,y) \\ J(0,y) = 1 \end{cases}$

Théorème de Liouville :

$$J(t,y) = \left| \det \frac{\partial X(t,y)}{\partial y} \right|$$

(Quantifie les variations de volume).

Preuve (dans le cas où b est régulier) :

On pose $\tilde{J}(t,y) = \left| \det \frac{\partial X(t,y)}{\partial y} \right|$

Si b est régulier (mettons $\mathcal{C}^k$), alors X est $\mathcal{C}^k$ par rapport à ses deux variables, et $\tilde{J}$ est $\mathcal{C}^{k-1}$.

Supposons $k \geq 2$. On écrit, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int \varphi(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y)\, dy = \int \varphi(x)\, dx \quad \forall t \geq 0.$$

On dérive par rapport à t:

$$\int (b \cdot \nabla \varphi)(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y)\, dy$$
$$+ \int \varphi(X(t,y))\, \dot{\tilde{J}}(t,y)\, dy = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Or par définition de $\tilde{J}$,

$$\int (b \cdot \nabla \varphi)(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y)\, dy$$
$$= \int (b \cdot \nabla \varphi)(x)\, dx$$
$$= - \int (\operatorname{div} b)(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= - \int (\operatorname{div} b)(X(t,y))\, \varphi(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y)\, dy$$

On rassemble les deux termes et on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(X(t,y)) \left[\dot{\tilde{J}}(t,y) - (\operatorname{div} b)(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y) \right] dy = 0 \\ \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Donc $\dot{\tilde{J}}(t,y) = (\operatorname{div} b)(X(t,y))\, \tilde{J}(t,y) \quad \forall t \geq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^N.$

Par ailleurs on a

$$\tilde{J}(0,y) = |\det \mathrm{Id}| = 1.$$

Donc $\tilde{J}(t,y) = J(t,y) \quad \forall t \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^N$ ■

<u>Théorème</u> (formule des caractéristiques dans le cas conservatif) :
On suppose que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ vérifie (3) et que $\operatorname{div} b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.
Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ de l'équation conservative (2), donnée par

$$\begin{cases} u(t, X(t,y))\, J(t,y) = u_0(y) \\ \forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ quelconque.
u est solution de (2)

$\iff \partial_t u(t,x) + \operatorname{div}(b(t,x)\, u(t,x)) = 0 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$

$\iff \partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) + (\operatorname{div} b)(t,x)\, u(t,x) = 0$
$\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$

$\iff \frac{d}{dt}\left(u(t, X(t,y))\right) + \operatorname{div} b(t, X(t,y))\, u(t, X(t,y)) = 0$
$\forall t \geq 0, y \in \mathbb{R}^N$

$\iff \frac{d}{dt}\left(u(t, X(t,y))\, J(t,y)\right) = 0 \quad \forall t, y$

$\iff u(t, X(t,y))\, J(t,y) = u_0(y) \quad \forall t \geq 0, y \in \mathbb{R}^N$

■

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant de plus $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a :

(i) $\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx \quad \forall t \geq 0$
(conservation de la masse)

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|\,dx \quad \forall t \geq 0$

Démonstration :

(i) On a $\quad u(t, X(t,y))\, J(t,y) = u_0(y) \quad \forall y$

On intègre sur $\mathbb{R}^N$:

$$\underbrace{\int u(t, X(t,y)) \left| \det \frac{\partial X}{\partial y}(t,y) \right| dy}_{= \int u(t,x)\,dx} = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy$$

(ii) Idem avec $|u|$. ∎

III) Extension à des données peu régulières :

Théorème : (solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ pour la forme forte)

Soit $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ tel que $\operatorname{div} b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$.
On suppose que b vérifie (3).
Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe une unique solution $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ de l'équation (1) au sens des distributions.
Cette solution est donnée par

$$u(t, X(t,y)) = u_0(y).$$

Démonstration :

- Existence : Par approximation de la donnée initiale

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ quelconque.

Par densité, il existe une suite $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0 \quad \text{dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

$$\text{et} \quad \|u_0^n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après le théorème d'existence dans le cas régulier, il existe une solution u^n de l'équation (1), et cette solution est donnée par

$$(6) \begin{cases} u^n(t, X(t,y)) = u_0^n(y) \\ \forall t \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Montrons que cette famille est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T], L^1(B_R))$, pour tout $T>0$, $R>0$:

On a, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\int_{B_R} |u^n(t,x) - u^p(t,x)|\, dx$$

$$\underset{x=X(t,y)}{=} \int_{X(t)^{-1}(B_R)} |u^n(t, X(t,y)) - u^p(t, X(t,y))|\, J(t,y)\, dy$$

$$\leq M \int_{B_{R_T}} |u_0^n(y) - u_0^p(y)|\, dy,$$

où $M = \sup\limits_{\substack{0 \le t \le T \\ y \in B_{R_T}}} J(t,y)$, $R_T = \sup\limits_{\substack{0 \le t \le T \\ y \in B_R}} |X(t)^{-1}(y)|$

Comme la suite $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_0 dans L^1_{loc}, elle est de Cauchy dans L^1_{loc}. On en déduit que la suite $(u^n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T], L^1(B_R))$. Donc elle converge dans $\mathcal{C}([0,T], L^1_{loc})$. On note u sa limite.

On peut passer à la limite au sens des distributions dans (1). Donc u est solution de (1) au sens des distributions.

- Unicité : Utilisation de l'équation duale :

Par linéarité, il suffit de montrer que si u est solution au sens des distributions de (1) avec $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ et $u_0 = 0$, alors $u \equiv 0$.

Pour cela, on rappelle que si u est solution de (1) au sens des distributions, alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$,

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \left[\partial_t \varphi(t,x) + \operatorname{div}(b(t,x)\varphi(t,x))\right] dt\,dx \tag{7}$$

$$= \int_0^\infty u_0(x) \varphi(0,x)\,dx.$$

Si $u_0 = 0$, alors le second membre est nul.
Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ quelconque, $T > 0$ quelconque.
On prend une famille $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ telle que

$$\theta_\varepsilon(t) = 1 \text{ si } t \in [0, T]$$

$$\theta_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{si } t \geqslant T + \varepsilon$$

$$\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+), \quad 0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1, \quad \theta_\varepsilon'(t) \leq 0$$

On prend $\varphi = \theta_\varepsilon \psi$ dans (7).

On a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\theta_\varepsilon(t)\left[\partial_t \psi + \operatorname{div}(b\psi)\right](t,x)\, dt\, dx$$

(8)

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\, \psi(t,x)\, \partial_t \theta_\varepsilon(t) \quad dt\, dx = 0$$

La première intégrale tend vers

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\left[\partial_t \psi + \operatorname{div}(b\psi)\right](t,x)\, dt\, dx$$

(Théorème de convergence dominée).

Pour la deuxième intégrale, on pose

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{T \leq t \leq T+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)\psi(t,x) - u(T,x)\psi(T,x)|\, dx$$

Puisque ψ est à support compact et que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc})$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$.

On en déduit que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\, \varphi(t,x)\, \partial_t \theta_\varepsilon(t)\, dt\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\, \varphi(T,x)\, \partial_t \theta_\varepsilon(t)\, dt\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u(t,x)\varphi(t,x) - u(T,x)\varphi(T,x) \right) dx \right) \partial_t \theta_\varepsilon(t) dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\, \varphi(T,x)\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u(t,x)\varphi(t,x) - u(T,x)\varphi(T,x) \right) dx \right) \partial_t \theta_\varepsilon(t) dt$$

La deuxième intégrale est majorée par

$$\int_0^\infty \omega(\varepsilon)\, |\partial_t \theta_\varepsilon(t)|\, dt = - \omega(\varepsilon) \int_0^\infty \partial_t \theta_\varepsilon(t) dt$$

$$= - \omega(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans (8), on en déduit donc

$$(9) \begin{cases} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \left[\partial_t \varphi + \operatorname{div}(b\varphi) \right](t,x)\, dx\, dt \\ = \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\, \varphi(T,x)\, dx \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N),\ \forall T > 0 \end{cases}$$

Par densité, cette formule reste vraie si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ est telle qu'il existe $R>0$ t.q

$$(10) \quad \varphi(t,x) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

À présent, soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ à support compact quelconque. D'après la partie II), il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \operatorname{div}(b\varphi) = 0 & t \leq T, x \in \mathbb{R}^N \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_0 \end{cases}$$

De plus, d'après la formule de représentation, φ vérifie (10). Donc on peut prendre φ comme fonction test dans (9). On en déduit que

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\, \varphi_0(x)\, dx = 0 \\ \forall T>0 \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Donc $u \equiv 0$. ∎

<u>Théorème</u>: (solutions dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$ pour la forme conservative)

On suppose que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div} b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$, et que b vérifie (3). Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ quelconque

Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$ de l'équation (2) au sens des distributions.

Démonstration: En exercice, en s'appuyant sur la démonstration dans le cas de la forme forte ∎

Propriété: Propagation des singularités:
Si u_0 a des discontinuités, celles-ci se retrouvent dans $u(t)$ pour tout $t>0$: il n'y a pas d'effet régularisant.
En effet: traitons par exemple le cas de la forme forte. On revient à la preuve de l'existence dans le théorème, et plus particulièrement à l'équation (6).
Puisque $u^n \to u$ dans $\mathcal{C}([0,T], L^1(B_R))$ pour tout $T>0$, $R>0$, on peut passer à la limite presque partout dans (6) pour une sous suite. On a donc

$$u(t, X(t,y)) = u_0(y) \quad pp\ y \in \mathbb{R}^N, t>0.$$

En particulier, si $u_0 = \chi_A$ pour un certain ensemble mesurable A, alors $u(t) = \chi_{A(t)}$, où $A(t) = X(t, A)$. Donc $u(t)$ possède des discontinuités.

IV) Le théorème de Di Perna - Lions :

Théorème : Soit $b \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\operatorname{div} b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$
Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Alors il existe une unique solution $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + b(x) \cdot \nabla_x u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

Démonstration :

⊛ Existence : On considère une famille $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de champs de vecteurs de $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ tels que :

- $b_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N ; \mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0$
- $\|b_\varepsilon - b\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$
- $\operatorname{div} b_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0$
- $\sup_{\varepsilon>0} \|\operatorname{div} b_\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant \|\operatorname{div} b\|_{L^\infty}$

(On peut par exemple régulariser b par convolution).

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$

$$(11) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + b^\varepsilon(x) \nabla_x u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \\ u^\varepsilon_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

De plus, u^ε vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Par conséquent, il existe une sous-suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ telle que

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } w^*\text{-}L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$$

Écrivons maintenant (11) au sens des distributions pour passer à la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$: on a, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{\varepsilon_k}(t,x) \left[\partial_t \varphi + \operatorname{div}(b^{\varepsilon_k} \varphi)\right](t,x)\, dt\, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, \varphi(0,x)\, dx.$$

Traitons par exemple le terme

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{\varepsilon_k}(t,x) \left(\operatorname{div} b^{\varepsilon_k}(x)\right) \varphi(t,x)\, dt\, dx$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{\varepsilon_k}(t,x) \left(\operatorname{div} b^{\varepsilon_k}(x)\right) \varphi(t,x)\, dt\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{\varepsilon_k}(t,x)\, \operatorname{div} b(x)\, \varphi(t,x)\, dt\, dx \\
&+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{\varepsilon_k}(t,x) \left[\operatorname{div} b^{\varepsilon_k}(x) - \operatorname{div} b(x)\right] \varphi(t,x)\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

Puisque $u^{\varepsilon_k} \to u$ $w^* L^\infty$ et que $\operatorname{div} b \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le premier terme converge vers

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \operatorname{div} b(x) \varphi(t,x)\, dt\, dx.$$

Le second terme est majoré en valeur absolue par

$$\|u_0\|_{L^\infty} \|\operatorname{div} b^\varepsilon - \operatorname{div} b\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \; T \; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)}$$

où $T > 0$ est tel que $\varphi(t,x) = 0 \quad \forall t \geq T$.
Le second terme tend donc vers 0 quand $k \to \infty$.

On en déduit que u est solution au sens des distributions de (1).

<u>Remarque</u>: Avec la même méthode, on montre sous les mêmes hypothèses sur b et pour tout $v_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'existence d'une solution au sens des distributions de l'équation sous forme conservative

$$\partial_t v + \operatorname{div}(b v) = 0$$

$$v_{|t=0} = v_0$$

Plus précisément: on a

$$\begin{cases} v^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t,y))\, J^\varepsilon(t,y) = v_0(y) \\ \forall t \geq 0, \; \forall y \in \mathbb{R}^N, \; \forall t > 0 \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse $\operatorname{div} b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{cases} e^{-Mt} \leq J^\varepsilon(t,y) \leq e^{Mt} \quad \forall t \geq 0, y \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0 \\ \text{où } M = \|\operatorname{div} b\|_\infty \end{cases}$$

On en déduit que

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|v_0\|_{L^\infty} e^{Mt}$$

$$\forall t \geq 0$$

et $\|v^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq \|v_0\|_{L^1}$

Donc pour tout $T > 0$, v_ε est borné dans $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$

À une sous suite près, $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ $w^* L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$

et w^* $L^\infty([0,T], M^1(\mathbb{R}^N))$

On en déduit l'existence d'une solution de (2) $v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$ dans $\mathcal{D}'$.

⊛ Unicité : On va utiliser le résultat intermédiaire suivant, dont la preuve est importante :

Lemme : Soit $\varphi \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ solution au sens des distributions $\mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{R}^N)$ de

$$(12) \qquad \partial_t \varphi + \operatorname{div}(b\varphi) = S.$$

avec $S \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$.

Soit $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$ et soit $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ un noyau régularisant.

On pose $\varphi_\varepsilon = \varphi *_x \rho_\varepsilon$, $S_\varepsilon = S *_x \rho_\varepsilon$. Alors

$$\partial_t \varphi_\varepsilon + \operatorname{div}(b\,\varphi_\varepsilon) = S_\varepsilon + r_\varepsilon, \text{ avec } r_\varepsilon \to 0 \text{ dans } L^1([0,T] \times \mathbb{R}^N)$$

Preuve : En régularisant (12) par convolution, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\partial_t \varphi_\varepsilon + \operatorname{div}\left((b\varphi) *_x \rho_\varepsilon\right) = S_\varepsilon$$

Donc $r_\varepsilon = \operatorname{div}(b\varphi_\varepsilon) - \operatorname{div}\left((b\varphi) *_x \rho_\varepsilon\right)$

On en déduit :

$$r_\varepsilon(t,x) = \operatorname{div}_x\left(b(x)\int \varphi(t,y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy\right)$$

$$-\operatorname{div}_x\left(\int b(y)\varphi(t,y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy\right)$$

$$= \operatorname{div}_x\left(\int_{\mathbb{R}^N}[b(x)-b(y)]\varphi(t,y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy\right)$$

$$= (\operatorname{div}_x b)\,\varphi_\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b(y))\,\varphi(t,y)\,\nabla_x\rho_\varepsilon(x-y)\,dy$$

Or $b_i(x) - b_i(y) = (x-y)\cdot\int_0^1 \nabla b_i(\tau x + (1-\tau)y)\,d\tau$

et

$$(x_j - y_j)\,\partial_i\rho_\varepsilon(x-y) = (x_j - y_j)\frac{1}{\varepsilon^{N+1}}\partial_{x_i}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N}R_{ij}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = R_{ij}^\varepsilon(x-y)$$

où $R_{ij}(x) = x_j\,\partial_{x_i}\rho(x)$

On a $R_{ij} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} R_{ij} = -\delta_{ij}$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b(y))\,\varphi(t,y)\nabla_x\rho_\varepsilon(x-y)\,dy$$

$$= \sum_{1\le i,j\le N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 (\partial_j b_i)(y+\tau(x-y))\,\varphi(t,y)\,R_{ij}^\varepsilon(x-y)\,d\tau\,dy$$

$$= \sum_{1\le i,j\le N}\int_{\mathbb{R}^N}(\partial_j b_i)(y)\,\varphi(t,y)\,R_{ij}^\varepsilon(x-y)\,dy\,ds$$

$$+ \sum_{1\le i,j\le N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1\left(\partial_j b_i(y+\tau(x-y)) - \partial_j b_i(y)\right)\varphi(t,y)\,R_{ij}^\varepsilon(x-y)\,d\tau\,dy$$

Le premier terme converge vers

$$- \operatorname{div} b(x)\, \varphi(t,x)$$

dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$

Le second terme est borné dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ par

$$T\|\varphi\|_{L^\infty}\|R_{ij}\|_{L^\infty}\ \omega(\nabla b, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

où $\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{h\in\mathbb{R}^N\\ |h|\le\delta}} \|f(\cdot+h)-f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

(module de continuité dans L^1)

Par ailleurs, $\operatorname{div}_x b\ \varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \operatorname{div} b\ \varphi$ dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$

Finalement, on en déduit que

$$r_\varepsilon(t,x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{dans } L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N) \qquad \blacksquare$$

Revenons à la preuve de l'unicité. On considère une solution au sens des distributions de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + b\cdot\nabla u = 0 \\ u_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

avec $u\in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N)$.

On commence par régulariser. D'après ce qui précède, on a, en posant $u^\varepsilon = u *_x \rho^\varepsilon$,

$$\partial_t u^\varepsilon + \underbrace{b\cdot\nabla u^\varepsilon}_{\in L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)} = r^\varepsilon, \quad \text{avec } r^\varepsilon \to 0 \text{ dans } L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$$

(écrire $b\cdot\nabla u^\varepsilon = \operatorname{div}(bu^\varepsilon) - (\operatorname{div} b)\,u^\varepsilon \ldots$)

Donc $\partial_t u^\varepsilon \in L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ et $u^\varepsilon \in W^{1,1}_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^N)$.

En particulier, $u^\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$, et $u^\varepsilon_{|t=0} = 0$.

On se donne une fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ arbitraire, de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $C>0$ tel que

$$\beta(x) \leq C|x| \text{ et } |\beta'(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et une fonction cut-off $\phi_R = \phi\left(\frac{\cdot}{R}\right)$, avec $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ telle que $\phi \equiv 1$ sur B_1, $\operatorname{Supp} \phi \subset B_2$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \beta(u^\varepsilon)\phi_R &= \int \beta(u^\varepsilon)(\operatorname{div} b)\phi_R \\ &\quad + \int \beta(u^\varepsilon)\, b \cdot \nabla\phi_R \\ &\quad + \int \beta'(u^\varepsilon)\, r^\varepsilon \phi_R . \\ &\leq \|\operatorname{div} b\|_\infty \int \beta(u^\varepsilon)\phi_R \\ &\quad + C\|u\|_\infty \frac{1}{R}\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\nabla\phi\|_\infty \\ &\quad + C\,\|r^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

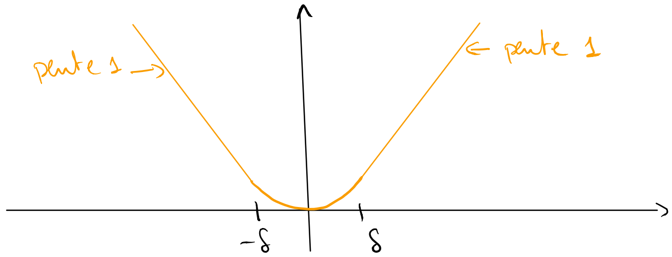
D'après le lemme de Gronwall, on obtient, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta(u^\varepsilon(t))\phi_R \leq e^{\|\operatorname{div} b\|_\infty T}\left[C T \|u\|_\infty \frac{\|b\|_{L^1}}{R} + C\|r^\varepsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^N)}\right]$$

$u^\varepsilon \to u$ dans $L^1_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^N)$. On peut donc passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ pour presque tout $t>0$: on obtient

$$\int \beta(u(t))\phi_R \leq C\frac{T}{R}\|u\|_\infty \|b\|_{L^1} e^{\|\operatorname{div} b\|_\infty T}.$$

On prend $\beta = \beta_\delta$ de la forme



En passant à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient

$$\begin{cases} \int |u(t)|\, \phi_R \leq \dfrac{C_T}{R} \|\nabla\phi\|_\infty \|u\|_\infty \|b\|_{L^1} \\ \forall R>0, \text{ pour presque tout } t>0. \end{cases}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$u(t) = 0 \text{ presque partout.}$$

Donc $\quad u \equiv 0.$

V) Introduction aux lois de conservation scalaires.

Cette partie est consacrée aux équations du type

$$(14) \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}_x A(u) = 0, & t>0, x \in \mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R})^N$.

De telles équations sont appelées "lois de conservation scalaires ".

Par analogie avec les parties précédentes, on se pose les questions suivantes :

- Existe-t-il des solutions régulières (mettons $\mathcal{C}^1$) si le flux A est $\mathcal{C}^1$?

- A-t-on une théorie d'existence et d'unicité pour des solutions peu régulières ?

1) Solutions régulières ; apparition de chocs en temps fini

On suppose que $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ et que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Si la solution de (14) est régulière, on peut écrire

$$\partial_t u + a(u(t,x)) \cdot \nabla_x u = 0,$$

où $a(v) = A'(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$, de sorte que $a \in \mathcal{C}^1$.

En s'appuyant sur la première partie, on définit les caractéristiques (associées à la solution)

$$(15) \begin{cases} \dot{X}(t,y) = a(u(t, X(t,y))) \\ X(0,y) = 0 \end{cases}$$

Tant que u est de classe $\mathcal{C}^1$, u est constante le long des caractéristiques :

$$u(t, X(t,y)) = u_0(y).$$

En injectant cette identité dans (15), on voit que les caractéristiques sont des droites :

$$\boxed{X(t,y) = y + t\, a(u_0(y))}$$

<u>Théorème</u> : Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.
Alors il existe $T>0$ tel que l'équation (14) admette une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}^N$.
Cette solution est définie de façon implicite par

$$(16)\begin{cases} u(t, y + t\, a(u_0(y))) = u_0(y) \\ \forall t \in [0,T[\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de comprendre à quelle condition la formule (16) définit $u(t)$ de façon univoque. Il faut et il suffit que l'application

$$\phi_t : y \longmapsto y + t\, a(u_0(y))$$

soit un difféomorphisme pour tout $t \in [0,T]$
Théorème d'inversion globale : on a :

- $\phi_t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \forall t \geq 0$
- $d\phi_t(y) = Id + t\, d(a \circ u_0)(y)$

Tant que $t \|\nabla(a \circ u_0)\|_\infty < 1$, $d\phi_t(y)$ est injective pour tout $y \in \mathbb{R}^N$.

- Si $\phi_t(y) = \phi_t(y')$:
  $y - y' = t(a \circ u_0(y') - a \circ u_0(y))$
  $\|y - y'\| \leq t \|\nabla(a \circ u_0)\|_\infty \|y' - y\|$.

Si $t\|\nabla(a \circ u_0)\|_\infty < 1$, nécessairement ϕ_t est injective.

Bilan : Soit $T = \dfrac{1}{\|\nabla(a\circ u_0)\|_\infty}$. Alors

Φ_t est un difféomorphisme pour tout $t \in [0,T[$.

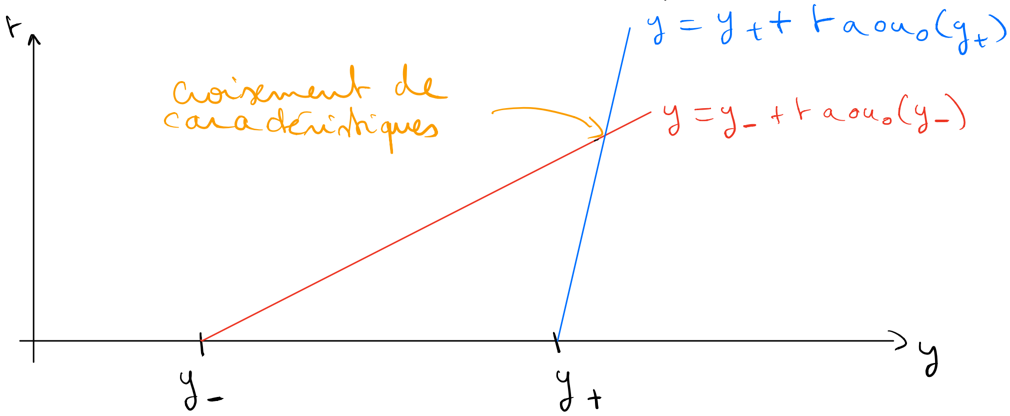
Donc (14) admet une solution $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[$. ∎

Formation de chocs :

En dimension 1 : On prend a, u_0 tels que $a\circ u_0$ est décroissante.

Par exemple : $a \nearrow$ et $u_0 \searrow$.

Traçons deux caractéristiques issues de $y_- < y_+$:



Sur la droite rouge (avant le croisement) : on a

$$u(t, X(t,y_-)) = u_0(y_-)$$

Sur la droite bleue (avant le croisement) : on a

$$u(t, X(t,y_+)) = u_0(y_+)$$

Au point de croisement, si u était toujours $\mathcal{C}^1$, on aurait

$$u(t_c, y_c) = u_0(y_-) = u_0(y_+) \text{ : absurde.}$$

Donc des discontinuités apparaissent en temps fini.

Cette formation de singularités est intrinsèquement liée au caractère non linéaire de l'équation.

2) Ondes de choc, ondes de détente, non-unicité :

Dans ce paragraphe, on prend $N=1$ et on s'intéresse au problème de Cauchy pour une donnée initiale de la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x<0 \\ u_d & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

Ce problème est également appelé "problème de Riemann".

<u>Proposition</u> (Ondes de choc) :
Il existe des solutions au sens des distributions du problème de Riemann sous la forme

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x<\sigma t \\ u_d & \text{si } x>\sigma t \end{cases}$$

où la vitesse σ du choc est donnée par

$$\sigma = \frac{A(u_g)-A(u_d)}{u_g-u_d}$$

(relation de Rankine-Hugoniot).

<u>Démonstration</u> : on écrit (dans le cas $\sigma>0$)

$$u(t,x) = u_g \mathbb{1}_{x-\sigma t<0} + u_d \mathbb{1}_{x-\sigma t>0}$$

$$= u_g \mathbb{1}_{\frac{x}{\sigma}-t<0} + u_d \mathbb{1}_{\frac{x}{\sigma}-t>0}$$

On a donc :

$$\partial_t u = u_g \,\delta\left(t-\frac{x}{\sigma}\right) - u_d \,\delta\left(t-\frac{x}{\sigma}\right) \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{à } x\\ \text{fixé}\end{smallmatrix}\right)$$

et $\quad A(u(t,x)) = A(u_g)\, \mathbb{1}_{x-\sigma t<0} + A(u_d)\, \mathbb{1}_{x-\sigma t>0}$

Donc $\quad \partial_x A(u(t,x)) = -A(u_g)\,\delta(x-\sigma t) + A(u_d)\,\delta(x-\sigma t)$

(à t fixé).

Exercice : Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$,

$$\delta\left(t-\frac{x}{\sigma}\right) = |\sigma|\,\delta(x-\sigma t)$$

On en déduit que u est solution de (14) au sens des distributions si

$$\delta(x-\sigma t)\left[\sigma(u_g-u_d) + A(u_d) - A(u_g)\right] = 0$$

i.e. $\quad \sigma = \dfrac{A(u_d)-A(u_g)}{u_d-u_g}$ ▨

Proposition (Ondes de relaxation) :

On suppose A convexe (et donc a croissante)

On pose $\quad \xi_g = a(u_g), \quad \xi_d = a(u_d)$.

Alors il existe une solution dans $\mathcal{D}'$ du problème de Riemann ~~Riemann~~ lipschitzienne pour tout $t>0$, donnée par

$$u(t,x) = \underline{u}\left(\frac{x}{t}\right)$$

où $\quad \underline{u}(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{si } \xi \leq \xi_g \\ a^{-1}(\xi) & \text{si } \xi \in [\xi_g, \xi_d] \\ u_d & \text{si } \xi \geq \xi_d. \end{cases}$

Démonstration :

On a $\dfrac{\partial}{\partial t}\, \underline{u}\left(\dfrac{x}{t}\right) = -\dfrac{x}{t^2}\, \underline{u}'\left(\dfrac{x}{t}\right)$

$$= -\frac{1}{t}\, \xi\, \underline{u}'(\xi) \quad \text{avec } \xi = \frac{x}{t}$$

et $\dfrac{\partial}{\partial x} A\left(\underline{u}\left(\dfrac{x}{t}\right)\right) = \dfrac{1}{t}\, \underline{u}'(\xi)\, a(\underline{u}(\xi))$

Donc

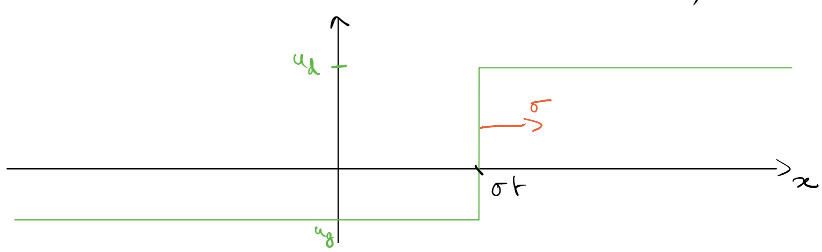
$$\partial_t\, \underline{u}\left(\frac{x}{t}\right) + \partial_x A\left(\underline{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{1}{t}\, \underline{u}'(\xi)\left[-\xi + a(\underline{u}(\xi))\right]$$

or :
- si $\xi \leq \xi_g$ ou $\xi \geqslant \xi_d$, $\underline{u}'(\xi) = 0$.
- si $\xi \in [\xi_g, \xi_d]$, $a(\underline{u}(\xi)) = a(a^{-1}(\xi)) = \xi$.

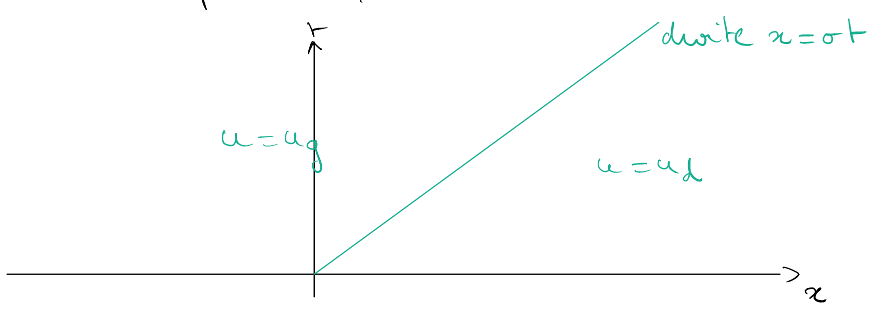
Donc u est bien solution au sens des distributions ∎

Représentations graphiques :

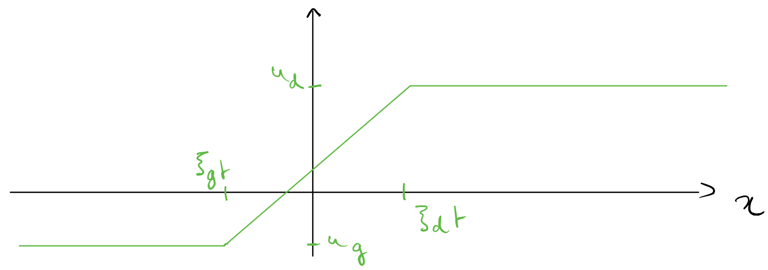
- Onde de choc : à un instant $t>0$,



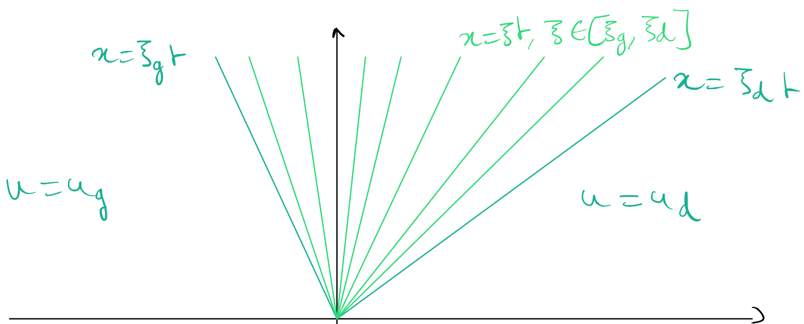
Dans le plan (x,t) :



- Onde de raréfaction (dans le cas $a(u)=u$) :
  À un instant $t>0$,



Dans le plan (x,t) :



Trafic routier : onde de choc = embouteillage, de raréfaction = démarrage à un feu rouge.

<u>Bilan</u> : Non unicité des solutions !

Il faut un moyen de "sélectionner" des solutions.
$\rightsquigarrow$ Notion d'entropie.

3) <u>Solutions entropiques</u> :

<u>Définition</u> (solution entropique) :
Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ une solution au sens des distributions de (14).
On dit que u est une <u>solution entropique</u> de (14) si pour toute fonction convexe $S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{\partial S(u)}{} + \mathrm{div}_x\, \eta^S(u) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'$$

où η^S est défini par $\eta^{S'} = a' S'$.

<u>Proposition</u>: (admise - cf DM)
Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ une solution au sens des distributions de (14). Alors u est une solution entropique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t |u-k| + \mathrm{div}_x \big(\mathrm{sgn}(u-k)(A(u)-A(k))\big) \leq 0$$

dans $\mathcal{D}'$

<u>Définition</u>: Les fonctions $S \in \mathcal{C}^2$ convexes sont appelées entropies. Les fonctions $u \in \mathbb{R} \longmapsto |u-k|$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont appelées entropies de Kruzkhov.

<u>Théorème</u> (admis - cf DM):
Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ quelconque. Alors le problème de Cauchy (14) admet une unique solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

De plus, si u et v sont deux solutions entropiques de données initiales u_0 et v_0 respectivement, on a

$$\partial_t |u-v| + \mathrm{div}_x \big(\mathrm{sgn}(u-v)(A(u)-A(v))\big) \leq 0.$$

En particulier, si $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$, $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$ et

$$\begin{cases} \|u(t)-v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0-v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

<u>Application</u> : On suppose que $N = 1$ et que le flux A est convexe.

Alors : • Si $u_g < u_d$, l'onde de raréfaction est l'unique solution entropique.

• Si $u_g > u_d$, l'onde de choc est l'unique solution entropique

(En exercice)